



# Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Chiapas.

Selectivo 1: Día 2



Nombre: \_\_\_\_\_

## Instrucciones:

- El tiempo máximo de duración del examen será de 4.5 horas.
- Deberás escribir cada problema que resuelvas, o intentes, en paginas diferentes.
- En caso de cualquier duda referente al enunciado de alguno de estos problemas, deberás preguntarla por escrito. Tienes la primera hora para hacer preguntas.

## Problemas:

1. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$  los enteros del 1 al 2017 en algún orden, de manera que ningun número permanece en su posición original. Determina todos los enteros no negativos  $n$  tales que,

$$(a_1 - 1)^n + (a_2 - 2)^n + \dots + (a_{2017} - 2017)^n$$

es un número impar.

2. En el triángulo  $ABC$  sean  $L, M$  y  $N$  los puntos medios de  $BC, CA$  y  $AB$  respectivamente. Considera las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  cuyos diámetros son  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Sea  $X$  el punto afuera de  $ABC$  en donde la recta  $LN$  se intersecta con  $C_2$ . Sea  $Y$  el punto afuera de  $ABC$  en donde la recta  $LM$  se intersecta con  $C_1$ . Las tangentes a  $C_2$  por  $X$  y a  $C_1$  por  $Y$  se cortan en  $Z$ . Prueba que  $ZX = ZY$ .
3. Considera un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es a lo más 1. Demuestra que el conjunto de puntos puede ser encerrado en un círculo de radio  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .